Wie weit kann man in den Himmel gucken?

Wir gehen von folgenden Eckdaten aus:

$$Erdumfang\ \boldsymbol{U} = 40030\ km$$

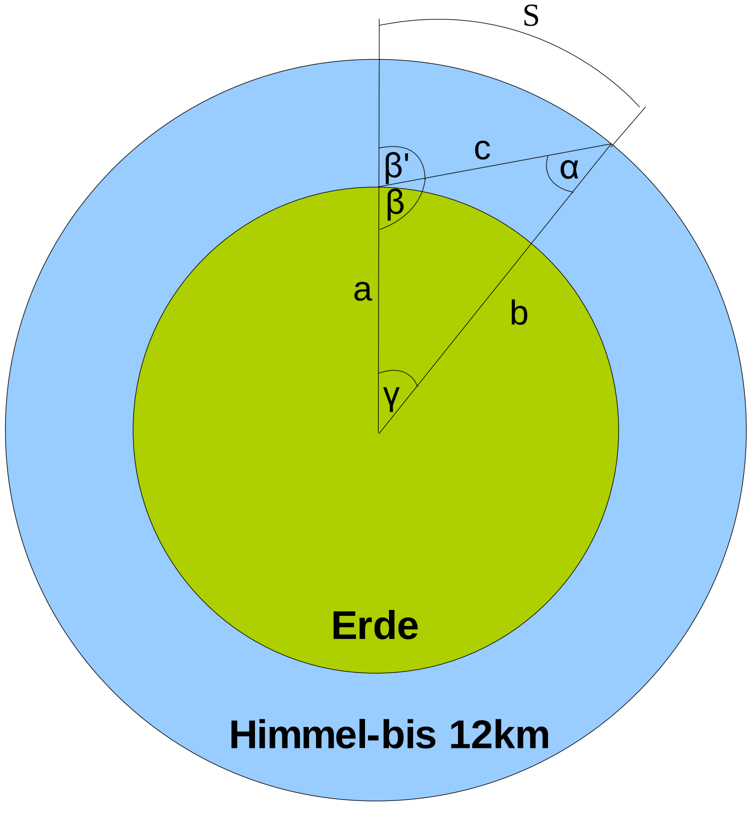
Das mag manchen hier nicht reichen, oder ungenau / falsch sein, außerdem gibt es ja je nach Breitengrad gewisse Unterschiede, aber das macht hier gar nichts, weil wir hier von Promille an Unterschied sprechen. Ihr könnt das ja später gerne mit anderen Werten nachrechnen. Uns reicht der mittlere Erdumfang. Die Daten stammen von hier: http://www.erdpunkte.de/erde-%11-daten-und-fakten.html (damit es nicht heißt, wir würden nur Wikipedia heranziehen)

Aus dem mittleren Erdumfang ergibt sich folgendes:

$$Erddurchmesser\ \boldsymbol{d} = \frac{U}{\pi} = \frac{40030\mathrm{km}}{\pi} \approx 12.741{,}9\ km$$

$$Erdradius\ \boldsymbol{r} = \frac{d}{2} \approx 6.371\ km$$

Wir benutzen folgendes Modell vom Erde/Himmel:
Das Ergebnis soll die Strecke S sein. Beziehungsweise am Ende S x 2. Die vom Boden aus sichtbare Strecke, die ein Flugzeug entlang der Erdkrümmung in einer Höhe von 12 km fliegt (mit Einschränkung des Blickwinkels β').



Bei β = 90° würde man übrigens geradewegs in Richtung Horizont schauen. Da unsere Fotos aber keine Kondensstreifen im Blickwinkel 0° zum Horizont darstellen, sondern **alle über 15°** zum Horizont, sind wir von einem Winkel β = 105° ausgegangen (90° + 15°). Also vom Zenit bis zur unteren Kante des Blickwinkels sind es β' = 75° (90° - 15°). Das ist realistisch. Meistens ist β' sogar noch erheblich kleiner.
Um jetzt anfangen können zu rechnen, müssen wir nun die Werte einsetzen. Erstmal ist unsere Seite a = der Erdradius r. Also 6.371km. Die Strecke b entspricht dem Erdradius + 12 km also 6383 km.

Rechenweg (Dreicksberechnung):

Wir werden über den Winkel γ die Strecke S ermitteln. Vorher benötigen wir noch den fehlenden Winkel α.

Setzen wir also folgendes ein:

$$a = r = 6.371\,km$$
$$b = r + 12\,km = 6.371\,km + 12\,km = 6383\,km$$
$$\beta = 105°$$

Wir rechnen zuerst mit dem Sinussatz, um α zu ermitteln.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

verkürzt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

es folgt:

$$\sin\alpha = \frac{a\cdot\sin\beta}{b} \quad \rightarrow \quad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a\cdot\sin\beta}{b}\right)$$

Werte eingesetzt:

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a\cdot\sin\beta}{b}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{6371\,km\cdot\sin 105°}{6383}km\right) = \sin^{-1} 0{,}964109891 = 74{,}6031...°$$

Danach reicht die Winkelsumme 180° eines Dreiecks, um auf γ zu kommen.

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 74{,}6031° - 105° = 0{,}39687...°$$

Sie Strecke S ist die sichtbare Strecke in einer Höhe von 12 km, also muss man zunächst den Umfang der Erde in einer Höhe von 12 km annehmen.

$$Himmelsumfang\ 12\mathrm{km}\ U_{12} = b\cdot 2\cdot\pi = 6.383\mathrm{km}\cdot 2\cdot\pi = 40.105{,}6\,km$$

Jetzt müssen wir nur noch die Gradteilung vornehmen. Einfacher Dreisatz:

$$U_{12} \triangleq 360°$$
$$1° \triangleq U_{12}/360 = 40.105{,}6\,km/360 = 111{,}4\,km$$

γ ist kleiner als 1. Also

$$S = U_{1°}\cdot\gamma = 111{,}4\,km\cdot 0{,}3968...° = 44{,}21\,km$$

$$S\cdot 2 = 44{,}21\cdot 2 = \underline{\underline{\mathbf{88{,}42\ km}}}$$

also sogar noch weniger als 90 km.

Noch Fragen? **Selber rechnen!**

Diese Information stammt von http://www.chemtrail.de